

Gottfried Kech

**Fachrechnen**

Grundwissen für Zahntechniker

# **Fachrechnen**

6. überarbeitete Auflage

Gottfried Kech

Verlag Neuer Merkur GmbH, 81206 München

Bibliografische Informationen Der Deutschen Nationalbibliothek  
Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie; detail-  
lierte bibliografische Daten sind im Internet über <http://dnb.ddb.de> abrufbar.

© 1995 Verlag Neuer Merkur GmbH  
Verlagsort: Postfach 60 06 62, D-81206 München

Alle Urheberrechte vorbehalten. Vervielfältigungen bedürfen der besonderen Genehmigung.

Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der  
engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlages unzulässig und strafbar.  
Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmung und die Einspeicherung  
und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Alle in dieser Veröffentlichung enthaltenen Angaben, Ergebnisse usw. wurden vom Autor nach bestem Wissen  
erstellt und von ihnen und dem Verlag mit größtmöglicher Sorgfalt überprüft. Gleichwohl sind inhaltliche  
Fehler nicht vollständig auszuschließen. Daher erfolgen alle Angaben ohne jegliche Verpflichtung oder Gar-  
antie des Verlages oder des Autors. Sie garantieren oder haften nicht für etwaige inhaltliche Unrichtigkeiten  
(Produkthaftungsausschluss). Im Text sind Warennamen, die patent- oder urheberrechtlich geschützt sind,  
nicht unbedingt als solche gekennzeichnet. Aus dem Fehlen eines besonderen Hinweises oder des Zeichens  
® darf nicht geschlossen werden, es bestehe kein Warenschutz.

Grundwissen für Zahntechniker Band VIII  
Gottfried Kech  
Fachrechnen  
6. überarbeitete Auflage 2007 – ISBN 978-3-937346-30-4

Titelgestaltung: Peter Hänssler  
Layout: Dagmar Papic

Druck: Konrad Tritsch Print und digitale Medien GmbH, Ochsenfurt-Hohestadt

# Vorwort

Das vorliegende Fachbuch „Fachrechnen für Zahntechniker“ ist als Neuauflage komplett überarbeitet. Vor allem sind alle DM-Beträge durch € ersetzt und die Prozentsätze an die jetzt gültige Mehrwertsteuer angepasst worden.

Die Aufgaben zum technischen Rechnen sind im Lernfeldunterricht sinnvoll einsetzbar und können zum selbständigen, handlungsorientierten Lernen eine wertvolle Hilfe darstellen. Die Grundrechenarten sind eher als Ergänzung und für den Auszubildenden als Nachschlagemöglichkeit gedacht.

Allen, die mir bei der Erstellung und Überarbeitung dieses Buches mit Rat und Tat zur Seite standen, möchte ich an dieser Stelle recht herzlich danken, insbesondere gilt dies für meinen Kollegen Herr Russ und Herr Hänssler vom Verlag Neuer Merkur.

Nürtingen, im Januar 2007  
Gottfried Kech

# Inhaltsverzeichnis

<b>Kapitel 1</b>			
<b>Zahlensysteme</b>	<b>11</b>		
1.1	Dezimales Zahlensystem	12	
1.2	Duales Zahlensystem	13	
1.3	Umwandlung einer ganzen Dezimalzahl in eine Dualzahl	14	
1.3.1	Umwandlung eines Dezimalbruchs in einen Dualbruch	14	
1.3.2	Umwandlung einer Dualzahl in eine Dezimalzahl	15	
1.4	Rechnen mit Dualzahlen	16	
1.4.1	Addition	16	
1.4.2	Subtraktion	16	
1.4.2.1	Ermittlung des Komplementwerts im Dezimalsystem	17	
1.4.2.2	Ermittlung des Komplementwerts im Dualsystem	17	
1.4.3	Multiplikation	19	
1.4.4	Division	19	
<b>Kapitel 2</b>			
<b>Bruchrechnen</b>	<b>21</b>		
2.1	Erweitern und Kürzen von Brüchen	23	
2.2	Das kleinste gemeinsame Vielfache (k.g.V.)	23	
2.3	Addition und Subtraktion von Brüchen	25	
2.4	Multiplikation und Division von Brüchen	28	
2.5	Umwandlung von Brüchen	29	
<b>Kapitel 3</b>			
<b>Buchstabenrechnen</b>	<b>21</b>		
3.1	Grundrechnungsarten	32	
3.2	Potenzen	34	
3.2.1	Rechnen mit Potenzen	35	
3.3	Wurzeln	37	
3.3.1	Rechnen mit Wurzeln	37	
3.4	Gleichungen	39	
<b>Kapitel 4</b>			
<b>Dreisatzrechnen</b>	<b>43</b>		
4.1	Dreisatz mit geradem Verhältnis	44	
4.2	Dreisatz mit ungeradem Verhältnis	46	
4.3	Zusammengesetzter Dreisatz	48	
<b>Kapitel 5</b>			
<b>Prozentrechnen – Promillerechnen</b>	<b>51</b>		
5.1	Berechnung des Prozentwerts	53	
5.2	Berechnung des Prozentsatzes	55	
5.3	Berechnung des Grundwerts	57	
5.4	Prozentrechnung vom vermehrten Grundwert	59	
5.5	Prozentrechnung vom verminderten Grundwert	61	
5.6	Promillerechnung	63	
<b>Kapitel 6</b>			
<b>Mischungsrechnen</b>	<b>65</b>		
6.1	Berechnung des Mischungsverhältnisses	66	
6.2	Anwendung des Mischungskreuzes bei Legierungen	69	
6.3	Mischungsrechnen ohne Mischungskreuz	71	
<b>Kapitel 7</b>			
<b>Zinsrechnen</b>	<b>73</b>		
7.1	Berechnen der Zinsen	74	
7.1.1	Berechnung der Zinseszinsen	77	
7.2	Berechnung des Kapitals	79	
7.3	Berechnung des Zinssatzes	81	
7.3.1	Berechnung des Effektivzinssatzes bei Teilzahlungsgeschäften	83	
7.4	Berechnung der Zinstage	85	

**Kapitel 8  
Größen und Einheiten 87**

8.1	Die gesetzlichen Einheiten (SI-Einheiten)	88
8.1.1	Vorsätze für Einheiten	88
8.2	Längen	89
8.3	Flächen	90
8.3.1	Inhalt und Umfang der Flächen	91
8.3.2	Seitenverhältnisse	93
8.3.2.1	Lehrsatz des Pythagoras	93
8.3.2.2	Winkelfunktionen	95
8.4	Körper	99
8.4.1	Volumen und Oberfläche der Körper	100
8.5	Masse, Dichte, Gewichtskraft	104
8.5.1	Masse	104
8.5.2	Dichte	104
8.5.3	Gewichtskraft	105

**Kapitel 9  
Geschwindigkeit 109**

9.1	Durchschnittsgeschwindigkeit	110
9.2	Umlaufgeschwindigkeit	112
9.3	Beschleunigung	115

**Kapitel 10  
Kräfte, Hebel, Reibung 119**

10.1	Maßeinheiten, Darstellen einer Kraft	120
10.2	Zusammensetzung von Kräften	120
10.3	Zerlegung einer Kraft	122
10.4	Kräfte an der schiefen Ebene	123
10.5	Festigkeit	125
10.5.1	Zugfestigkeit	125
10.5.2	Hooksches Gesetz	126
10.5.3	Elastizitätsmodul	127
10.5.4	Druckfestigkeit	127
10.5.5	Durchbiegung	128
10.6	Hebel	130
10.6.1	Moment einer Kraft – Drehmoment	133
10.6.2	Auflagekräfte	134
10.7	Reibung	138

**Kapitel 11  
Arbeit, Leistung, Wirkungsgrad 143**

11.1	Mechanische Arbeit	144
11.2	Mechanische Leistung	145
11.3	Wirkungsgrad	146

**Kapitel 12  
Druck 149**

12.1	Begriff, Maßeinheiten, Bezeichnungen	150
12.2	Schwere-Druck in Flüssigkeiten	151
12.3	Hydraulische Kraftübertragung	152
12.4	Druck und Volumen von Gasen	153
12.5	Auftriebskraft	154

**Kapitel 13  
Wärme 159**

13.1	Temperatur	160
13.2	Wärmeausdehnung	163
13.3	Wärmemenge	165
13.3.1	Spezifische Wärmekapazität	165
13.3.2	Spezifische Schmelzwärme	166
13.3.3	Spezifische Verdampfungswärme	167
13.3.4	Spezifischer Heizwert	168
13.3.5	Mechanische Arbeit und Wärme	169
13.3.6	Wärmemischung	170

**Kapitel 14  
Elektrotechnik 175**

14.1	Ohmsches Gesetz	176
14.2	Leiterwiderstand	176
14.3	Reihenschaltung	177
14.4	Parallelschaltung	178
14.5	Elektrische Leistung	183
14.6	Elektrische Arbeit	184
14.7	Faradaysches Gesetz der elektrolytischen Stoffabscheidung	186

**Kapitel 15****Kostenrechnung 189**

- 15.1 Einzel- und Gemeinkosten 190
- 15.2 Kalkulation von Eigenerzeugnissen 191
- 15.3 Feste (fixe) und veränderliche (variable) Kosten 193
- 15.4 Abschreibung 193
  - 15.4.1 Die lineare Abschreibungsmethode 194
  - 15.4.2 Die degressive Abschreibungsmethode 194

**Kapitel 16****Anhang 199**

- 16.1 Übersicht über die wichtigsten SI-Einheiten 200
- 16.2 Dichten, Schmelz- und Siedepunkte einiger Stoffe 202

# Kapitel 1

## Zahlensysteme

1.1	Dezimales Zahlensystem	12
1.2	Duales Zahlensystem	13
1.3	Umwandlung einer ganzen Dezimalzahl in eine Dualzahl	14
1.3.1	Umwandlung eines Dezimal- bruchs in einen Dualbruch	14
1.3.2	Umwandlung einer Dualzahl in eine Dezimalzahl	15
1.4	Rechnen mit Dualzahlen	16
1.4.1	Addition	16
1.4.2	Subtraktion	16
1.4.2.1	Ermittlung des Komplement- werts im Dezimalsystem	17
1.4.2.2	Ermittlung des Komplement- werts im Dualsystem	17
1.4.3	Multiplikation	19
1.4.4	Division	19



Unter einem Zahlensystem versteht man eine Gesetzmäßigkeit, eine Vorschrift, die es ermöglicht, mit Hilfe einer begrenzten Anzahl unterschiedlicher Zeichen, den Ziffern, eine möglichst große Anzahl unterschiedlicher Zahlen darzustellen.

Heute hat sich das Positions- oder **Stellenwertsystem** durchgesetzt.

Beim Stellenwertsystem hat jede Ziffer neben ihrem Eigenwert noch einen Positionswert, der von der Stellung der Ziffer im Zahlwort abhängig ist.

## 1.1 Dezimales Zahlensystem

Das dezimale Zahlensystem umfasst die zehn Ziffern

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
<b>10 Ziffern</b>									
10 = Basis des Dezimalsystems									
Beispiel: Für die uns geläufige Schreibweise von 7205,1 – Basis 10									
Stellenbelegung	7	2	0	5					
Stellenwert		T	H	Z	E	Zehntel			
		1000	100	10	1	1/10			
Stellenwert in Zehnerpotenzen		10 <sup>3</sup>	10 <sup>2</sup>	10 <sup>1</sup>	10 <sup>0</sup>	10 <sup>-1</sup>			
						1 · 10 <sup>-1</sup> =	0,1		
						5 · 10 <sup>0</sup> =	5,0		
						0 · 10 <sup>1</sup> =	0,0		
						2 · 10 <sup>2</sup> =	200,0		
						7 · 10 <sup>3</sup> =	7000,0		
							7205,1		

## 1.2 Duales Zahlensystem

In der elektronischen Datenverarbeitung ist ein weiteres Stellenwertsystem von besonderer Bedeutung, das **Dualsystem**. Das Dualsystem hat nur die beiden Ziffern:

	0	1				
	2 Ziffern					
	<b>2 = Basis des Dualsystems</b>					
	Beispiel: Die Zahl 101001 – Basis 2					
Stellenbelegung	1	0	1	0	0	1
Stellenwerte	32	16	8	4	2	1
Stellenwert in Zweierpotenzen	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$
						$1 \cdot 2^0 = 1$ $0 \cdot 2^1 = 0$ $0 \cdot 2^2 = 0$ $1 \cdot 2^3 = 8$ $0 \cdot 2^4 = 0$ $1 \cdot 2^5 = 32$ <hr/> =41 dezimal
	1	0	1	0	0	1 dual

Die Bedeutung des Dualsystems in der Technik liegt darin, dass sich die beiden Ziffern 0 und 1 einfach und zuverlässig durch zwei unterschiedliche Betriebszustände eines technischen Bauelements darstellen lassen.

### Beispiel:


Schalter oder Ventil ein = 1  
 Schalter oder Ventil aus = 0

## 1.3 Umwandlung einer ganzen Dezimalzahl in eine Dualzahl

Die Dezimalzahl wird fortlaufend durch 2 dividiert bis zum Ergebnis 0. Die sich jeweils ergebenden Divisionsreste 0 oder 1 bilden aneinandergereiht von unten nach oben gelesen die entsprechende Dualzahl.

### Beispiel:

Umwandlung der Dezimalzahl 466 in eine Dualzahl

$$\begin{array}{r}
 466 : 2 = 233 \text{ Rest } 0 \\
 233 : 2 = 116 \text{ Rest } 1 \\
 116 : 2 = 58 \text{ Rest } 0 \\
 58 : 2 = 29 \text{ Rest } 0 \\
 29 : 2 = 14 \text{ Rest } 1 \\
 14 : 2 = 7 \text{ Rest } 0 \\
 7 : 2 = 3 \text{ Rest } 1 \\
 3 : 2 = 1 \text{ Rest } 1 \\
 1 : 2 = 0 \text{ Rest } 1
 \end{array}$$


### Ergebnis:


$$466_{10} = 111010010_2$$

### 1.3.1 Umwandlung eines Dezimalbruchs in einen Dualbruch

Der Dezimalbruch wird mit 2 multipliziert und die Stelle vor dem Komma (0 oder 1) notiert. Der Teil rechts vom Komma wird wieder mit 2 multipliziert, usw. bis zum Ergebnis 0. Die notierten Vorkomma-Zahlen ergeben aneinandergereiht von oben nach unten gelesen den gesuchten Dualbruch.

### Beispiel:

Umwandlung des Dezimalbruchs 0,28125 in einen Dualbruch

$$\begin{array}{r}
 0,28125 \cdot 2 = 0,5625 = 0,5625 + 0 \\
 0,5625 \cdot 2 = 1,125 = 0,125 + 1 \\
 0,125 \cdot 2 = 0,25 = 0,25 + 0 \\
 0,25 \cdot 2 = 0,5 = 0,5 + 0 \\
 0,5 \cdot 2 = 1,0 = 0,0 + 1
 \end{array}$$


### Ergebnis:

$$0,28125_{10} = 0,01001_2$$

### 1.3.2 Umwandlung einer Dualzahl in eine Dezimalzahl

Die einfachste Umwandlung ist die anhand des Zahlenbildungsgesetzes, d. h. man addiert die dezimalen Stellenwerte der Einsen in der Dualzahl.

#### Beispiel:

Umwandlung der Dualzahl 1011 0011,101 in eine Dezimalzahl

$$\begin{array}{cccccccccccc}
 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1, & 1 & 0 & 1 \\
 2^7 & 2^6 & 2^5 & 2^4 & 2^3 & 2^2 & 2^1 & 2^0 & 2^{-1} & 2^{-2} & 2^{-3} \\
 128 & + & 0 & + & 32 & + & 16 & + & 0 & + & 0 & + & 2 & + & 1 & + & 0,5 & + & 0 & + & 0,125
 \end{array}$$

#### Ergebnis:

$$1011\ 0011,101_2 = 179,625_{10}$$

Die folgende Tabelle zeigt eine Gegenüberstellung der beiden Zahlensysteme.

<b>dezimal</b>	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
<b>dual</b>	0	1	10	11	100	101	110	111	1000	1001	1010

### Aufgaben

1.1 Wandeln Sie folgende Dezimalzahlen in Dualzahlen um

- a) 14    c) 78    e) 131    g) 213    i) 1025    k) 2049  
 b) 21    d) 91    f) 101    h) 513    j) 619    l) 636

1.2 Wandeln Sie folgende Dualzahlen in Dezimalzahlen um

- a) 1011    c) 11111    e) 100111    g) 1010101  
 b) 10001    d) 1010    f) 1110010    h) 1111111

## 1.4 Rechnen mit Dualzahlen

Die Rechengesetze sind dieselben wie für Dezimalzahlen. Unterschiede ergeben sich beim Rechnen wegen der unterschiedlichen Ziffernzahlen.

### 1.4.1 Addition

0 + 0	0 + 1	1 + 0	1 + 1 1	Übertrag
0	1	1	10	

**Beispiel:**                      dezimal                      dual

36 + 45 1	100100 + 101101 1 11	Übertrag
81	1010001	

### 1.4.2 Subtraktion

0 - 0	0 - 1	1 - 0	10 - 1 1	Übertrag
0	- 1	1	1	

**Beispiel:**                      dezimal                      dual

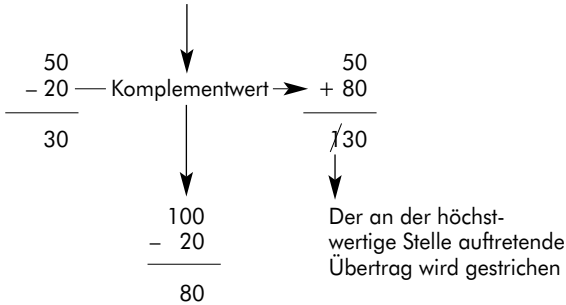
22 - 19 1	10110 - 10011 11	Übertrag
03	00011	

**Elektronische Datenverarbeitungsanlagen können nur addieren.** Die Subtraktion wird durchgeführt, indem zum Minuenden der **Ergänzungswert = Komplementwert** des Subtrahenden addiert wird.

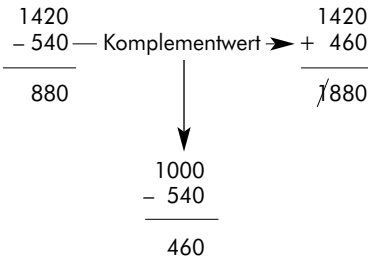
### 1.4.2.1 Ermittlung des Komplementwerts im Dezimalsystem

Der Komplementwert ist die Differenz zur nächsthöheren Zehner-, Hunderter-, Tausenderzahl usw.

**Beispiel 1:**



**Beispiel 2:**

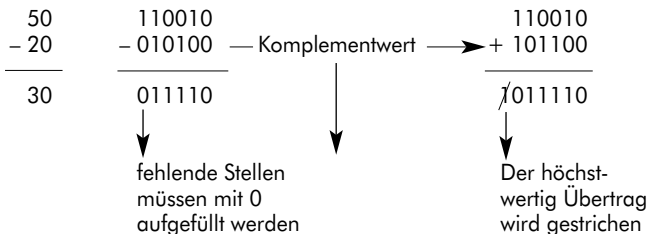


### 1.4.2.2 Ermittlung des Komplementwerts im Dualsystem

Der Komplementwert ist die Differenz zur nächsthöheren 2er-Zahl.

**Beispiel 1:** dezimal

dual



Der Zweierkomplement wird ermittelt, indem wir zunächst das Einerkomplement bilden und anschließend 1 dazu addieren.

$\begin{array}{r} 010100 \\ 101011 \rightarrow \text{Einerkomplement} \rightarrow \text{wird durch Umkehrung der Zahl ermittelt} \end{array}$
$\begin{array}{r} 101011 \\ + \quad 1 \\ \hline 10100 \rightarrow \text{Zweierkomplement} \end{array}$

**Beispiel 2:**

dezimal	dual	
84	1010100	
- 56	- 0111000	Komplementwert $\rightarrow$
<u>28</u>	<u>0011100</u>	$+ 1001000$
		<u>10011100</u>
	<u>0111000</u>	
	1000111 $\rightarrow$ Einerkomplement	
	<u>+ 1</u>	
	1001000 $\rightarrow$ Zweierkomplement	

**Aufgaben**

1.3 Wandeln Sie folgende Dezimalzahlen in Dualzahlen um und führen Sie dann die Addition durch.

a) 19	b) 71	c) 113	d) 87	e) 156
+ 32	+ 7	+ 219	+ 64	+ 99

1.4 Subtrahieren Sie folgende Dualzahlen durch Addition des Komplementwerts. Kontrollieren Sie die Subtraktion dezimal.

a) 11111	b) 101000	c) 11010101	d) 1000000
- 1001	11101	- 11000001	- 100000

### 1.4.3 Multiplikation

$$0 \cdot 0 = 0; 0 \cdot 1 = 0; 1 \cdot 0 = 0; 1 \cdot 1 = 1$$

**Beispiel:**

dezimal	dual
$\begin{array}{r} 17 \cdot 13 \\ \hline 17 \\ + 51 \\ \hline 221 \end{array}$	$\begin{array}{r} 10001 \cdot 1101 \\ \hline 10001 \\ 100010 \\ + 10001 \\ \hline 11011101 \end{array}$

### 1.4.4 Division

**Beispiel:**

dezimal	dual
$\begin{array}{r} 36 : 3 = 12 \\ 3 \\ \hline 06 \\ 6 \\ \hline 0 \end{array}$	$\begin{array}{r} 100100 : 11 = 1100 \\ - 11 \\ \hline 0011 \\ - 11 \\ \hline 00 \end{array}$

### Aufgaben

1.5 Wandeln Sie folgende Dezimalzahlen in Dualzahlen um und führen Sie dann die Multiplikation sowie Division durch. Kontrollieren Sie das Ergebnis dezimal.

a)  $9 \cdot 6$       b)  $12 \cdot 8$       c)  $18 \cdot 11$       d)  $25 \cdot 16$       e)  $17 \cdot 9$

f)  $27 : 3$       g)  $81 : 27$       h)  $49 : 7$       i)  $105 : 5$       j)  $45 : 15$